

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ  
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

РЯЗАНСКИЙ ИНСТИТУТ (ФИЛИАЛ)  
ФЕДЕРАЛЬНОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО ОБРАЗОВАТЕЛЬНОГО  
УЧРЕЖДЕНИЯ ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ МАШИНОСТРОИТЕЛЬНЫЙ  
УНИВЕРСИТЕТ (МАМИ)»

# Рабочая тетрадь

по курсу

## “Интегральное исчисление функции одной переменной”

Практикум по математике  
для студентов бакалавриата очной формы обучения

студента *первого* курса \_\_\_\_\_ группы

---

Ф.И.О.

Рязань 2020

**Рецензент:** Иванкина О.П., к. т. н., доцент кафедры теоретической и прикладной механики Рязанского института (филиала) Университета машиностроения

Тихонова О.В., Арабчикова Ю.И., Коняева Е.И. Рабочая тетрадь по курсу “Интегральное исчисление функции одной переменной”. Практикум по математике для студентов бакалавриата очной формы обучения; Рязанский институт (филиал) Университета машиностроения. – Рязань, 2020. – 40 с.

Рабочая тетрадь предназначена для студентов бакалавриата дневного отделения 1 курса всех направлений подготовки. Данное пособие содержит материал для проведения практических занятий и для организации самостоятельной работы студентов.

Печатается по решению Учебно-методического совета Рязанского института (филиала) Университета машиностроения.

© Рязанский институт (филиал)  
Университета машиностроения,  
2020

© О.В. Тихонова, Ю.И. Арабчикова,  
Е.И. Коняева  
2020

**Занятие 1. Понятие неопределенного интеграла. Метод замены  
переменной**

Вопросы для подготовки к занятию:

1. Что такое первообразная функции?
2. Что называется неопределенным интегралом?
3. Заполните таблицу интегралов:

1.  $\int u^\alpha du =$

2.  $\int du =$

3.  $\int \frac{du}{u} =$

4.  $\int a^u du =$

5.  $\int e^u du =$

6.  $\int \sin u du =$

7.  $\int \cos u du =$

8.  $\int \operatorname{tg} u du =$

9.  $\int \operatorname{ctg} u du =$

10.  $\int \frac{du}{\cos^2 u} =$

11.  $\int \frac{du}{\sin^2 u} =$

12.  $\int \frac{du}{\cos u} =$

13.  $\int \frac{du}{\sin u} =$

14.  $\int \frac{du}{1+u^2} =$

15.  $\int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} =$

16.  $\int \frac{du}{a^2+u^2} =$

17.  $\int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} =$

18.  $\int \frac{du}{\sqrt{u^2+a^2}} =$

19.  $\int \frac{du}{a^2-u^2} =$

4. Запишите формулу замены переменной в неопределенном интеграле:

- 
5. Изучите метод подведения множителя под знак дифференциала и заполните пропуски:

$$dx = d(x \pm a),$$

$$dx = d(kx), k = \text{const},$$

$$\cos x dx = d(\quad),$$

$$\sin x dx = d(\quad),$$

$$x dx =$$

$$\frac{1}{\sqrt{x}} dx =$$

$$e^x dx = d(\quad),$$

$$\frac{1}{x} dx = d(\quad),$$

$$\frac{1}{\cos^2 x} dx = d(\quad),$$

$$\frac{1}{\sin^2 x} dx = d(\quad).$$

**1.1. Вычислить интегралы от функций приведением их к табличным интегралам.**

$$\text{а) } \int (2x^3 - 5x^2 + 7x - 3) dx =$$

$$\text{б) } \int \left( 2^x + \frac{1}{\sqrt{x^3}} \right) dx =$$

$$\text{в) } \int 3 \sin x dx =$$

$$\text{г) } \int \left( \frac{1}{x-2} + \sin 3x \right) dx =$$

$$\text{д) } \int \left( \frac{1}{9+x^2} - 3^{-x} \right) dx =$$

$$\text{е) } \int \left( \frac{5}{\sin^2 x} - 4 \cos 2x \right) dx =$$

$$\text{ж) } \int \left( 8x^7 - \frac{5}{2}\sqrt{x^3} + \frac{7}{\sqrt{1-x^2}} \right) dx =$$

**1.2. Используя таблицу и основные свойства неопределенного интеграла, найти интегралы:**

$$\text{а) } \int \frac{dx}{\sqrt{16-9x^2}} =$$

$$\text{б) } \int \sqrt{3x-4} dx =$$

$$\text{в) } \int 4^{3-5x} dx =$$

$$\text{г) } \int \sin^2 x dx =$$

**1.3. Найти интегралы:**

$$\text{а) } \int \sin(ax+bx) dx =$$

$$\text{б) } \int \frac{dx}{x^2+4x+5} =$$

$$\text{в)} \quad \int \frac{\sqrt{\ln x + 2}}{x} dx =$$

$$\text{г)} \quad \int \frac{\operatorname{arctg}^2 x}{1+x^2} dx =$$

$$\text{д)} \quad \int \frac{dx}{\operatorname{ctg}^4 x \sin^2 x} =$$

$$\text{е)} \quad \int \frac{x dx}{x^2 + 3} =$$

**1.4. Используя метод замены переменной, вычислить интегралы:**

$$\text{а)} \quad \int \sin^3 x \cos x dx =$$

$$\text{б)} \quad \int \frac{\ln^5 x dx}{x} =$$

$$\text{в)} \quad \int \frac{x dx}{x^2 + 1} =$$

$$\text{г)} \quad \int \frac{x^2 dx}{(x^3 + 1)^2} =$$

$$д) \quad \int \frac{dx}{x\sqrt{9-\ln^2 x}} =$$

$$е) \quad \int \frac{\cos 3x dx}{\sqrt{\sin^2 3x + 10}} =$$

$$ж) \quad \int \frac{x - \sin \frac{1}{x}}{x^2} dx =$$

**1.5. Вычислить интегралы, используя подходящую подстановку:**

$$а) \quad \int \frac{\sin x dx}{\cos x + 1} =$$

$$б) \quad \int e^{x^3} x^2 dx =$$

в)  $\int \frac{5x-1}{\sqrt{4-x^2}} dx =$

+ дополнительные задания (1)-(3)

## Занятие 2. Интегрирование по частям в неопределенном интеграле (1 час)

Вопросы для подготовки к занятию:

1. Запишите формулу интегрирования по частям для неопределенного интеграла  $\int u(x)dv(x) =$  \_\_\_\_\_

2. Заполните таблицу (по образцу):

$\int u(x)dv(x)$	$u(x)$	$dv(x)$
$\int P_n(x)e^{ax} dx$	$P_n(x)$	$e^{ax} dx$
$\int P_n(x)\cos ax dx$		
$\int P_n(x)\sin ax dx$		
$\int P_n(x)\arctg x dx$		
$\int P_n(x)\arcsin x dx$		
$\int P_n(x)\ln x dx$		
$\int e^{ax} \cos bx dx$		
$\int e^{ax} \sin bx dx$		

### 2.1. Продолжите нахождение интегралов:

а)  $\int x \cdot e^x dx =$



б)  $\int \ln x dx =$

в)  $\int x \cdot \sin x dx =$

г)  $\int \arcsin dx =$

д)  $\int x^2 \cdot \cos x dx =$

е)  $\int e^x \cdot \cos x dx =$

ж)  $\int \arctg x dx =$

## 2.2. Вычислить интегралы:

а)  $\int \frac{x \cos x dx}{\sin^3 x} =$

б)  $\int \frac{\arccos x dx}{\sqrt{1+x}} =$

в)  $\int e^{\sqrt{x}} dx =$

г)  $\int \frac{\ln \ln x}{x} dx =$

+дополнительные задания (4)-(6)

**Занятие 2, 3. Интегрирование рациональных дробей. (3 часа)**

Вопросы для подготовки к занятию:

**1.** Что такое *рациональная дробь*? Какая дробь называется *правильной* (не-*правильной*)?

2. Закончите предложение: «Любую неправильную рациональную дробь можно представить в виде суммы \_\_\_\_\_»

3. Укажите основные типы простейших дробей:

- I.
- II.
- III.
- IV.

4. В чем заключается алгоритм интегрирования рациональной дроби?

**3.1. Вычислить интегралы:**

а)  $\int \frac{dx}{x-2} =$

б)  $\int \frac{dx}{(x+2)^3} =$

в)  $\int \frac{dx}{x^2 + 2x + 2} =$

г)  $\int \frac{6x-7}{x^2 + 4x + 13} dx =$

Решение. Дискриминант квадратного трехчлена в знаменателе подынтегральной дроби отрицателен, поэтому данная дробь – простейшая третьего типа.

Сначала найдем производную знаменателя дроби:

Затем выделим производную знаменателя в числителе дроби:

Выделим полный квадрат знаменателя:

Получим

$$\text{д) } \int \frac{4x-1}{x^2+x+1} dx =$$

**3.2. Найти интегралы:**

$$\text{а) } \int \frac{4dx}{x+3} =$$

$$\text{б) } \int \frac{11dx}{(x+2)^3} =$$

$$\text{B)} \int \frac{dx}{x^2 + 10x + 29} =$$

$$\text{Г)} \int \frac{x+6}{x^2 - 2x + 17} dx =$$

$$\text{Д)} \int \frac{dx}{(x^2 - 4x + 29)^2} =$$

**3.3. Запишите в виде суммы простейших дробей с неопределенными коэффициентами следующие дроби:**

а)  $\frac{x}{(x-1)(x+2)} =$

б)  $\frac{x+1}{x^2(x+3)} =$

в)  $\frac{2x-1}{(x+1)(x^2+x+1)} =$

г)  $\frac{1-x}{(x-1)^2(x^2+x+1)^2} =$

**3.4. Найти интегралы:**

а)  $\int \frac{7x+4}{(x-3)(x+2)} dx$

Решение. Подынтегральная дробь – правильная. Разложим ее на сумму простейших дробей.

б)  $\int \frac{x^2+2}{(x-1)(x+1)^2} dx$

B)  $\int \frac{x dx}{(x^2 + 1)(x^2 - 1)}$

$$\text{г)} \quad \int \frac{x^5 - 1}{x^3 + x^2 + x} dx$$

Решение. Данная подынтегральная дробь – неправильная, поэтому сначала выделим целую часть, поделив числитель на знаменатель «столбиком»:

$$\text{То есть } \frac{x^5 - 1}{x^3 + x^2 + x} =$$

$$\text{Отсюда } \int \frac{x^5 - 1}{x^3 + x^2 + x} dx =$$

Разложив на множители знаменатель полученной правильной дроби, представим ее в виде суммы простейших:



Тогда  $\int \frac{x^5 - 1}{x^3 + x^2 + x} dx =$

**3.5. Вычислить интегралы:**

а)  $\int \frac{7x - x^2 - 4}{(x+1)^2(x^2 - 5x + 6)} dx$

б)  $\int \frac{x^5 + x^4 - 8}{x^3 - 4x} dx$

### 3.6. Продолжите нахождение интегралов:

$$\text{a) } \int \frac{3e^{2x} + e^x + 1}{e^{2x} - 2e^x - 3} dx = \left. \begin{array}{l} e^x = t; e^x dx = dt \\ dx = \end{array} \right| =$$

$$\text{б) } \int \frac{\cos x dx}{(\sin x - 1)(\sin x + 2)} = \left. \begin{array}{l} \sin x = t \\ dt = d(\sin x) \\ dt = \end{array} \right| =$$

+ дополнительные задания (7) - (8)

#### Занятие 4. Интегрирование тригонометрических функций

Вопросы для подготовки к занятию:

1. Запишите универсальную тригонометрическую подстановку:

---

В каких случаях она применяется?

2. Для приведенных далее интегралов вида  $\int \sin^n x \cdot \cos^m x dx$ , где  $m$  и  $n$  - рациональные числа, укажите метод интегрирования:

*метод интегрирования*

- |  |  |
|--|--|
| 1) $\int \frac{\cos^3 x dx}{\sin^5 x}$ ;         |  |
| 2) $\int \sin^2 x \cos^2 x dx$ ;                 |  |
| 3) $\int \frac{\sin x}{\sqrt[3]{\cos^6 x}} dx$ ; |  |
| 4) $\int \frac{dx}{\sqrt{\sin^3 x \cos^7 x}}$ ;  |  |
| 5) $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^3 x}$ ;         |  |
| 6) $\int \frac{dx}{\sin x \cos^2 x}$ ;           |  |
| 7) $\int \frac{\cos^3 x dx}{\sin^4 x}$ ;         |  |
| 8) $\int \sin^4 x dx$ .                          |  |

**4.1. Вычислить интегралы:**

a)  $\int \frac{dx}{2 + \cos x - 2 \sin x} =$

б)  $\int \frac{dx}{\sin x} =$

**4.2. Найти интеграл  $\int \frac{dx}{1 + \sin^2 x}$ .**

Решение.

Поскольку подынтегральная функция \_\_\_\_\_ относительно  $\sin x$ , то применим подстановку \_\_\_\_\_

Получим  $\int \frac{dx}{1 + \sin^2 x} =$

### 4.3. Найти интегралы:

а)  $\int \frac{dx}{2\sin^2 x \cdot \cos x} =$

б)  $\int \frac{\sin^3 x dx}{\cos x^3 \sqrt{\cos x}} =$

в)  $\int \sin^4 x \cdot \cos^2 x dx =$

г)  $\int \operatorname{tg}^5 x dx =$

**4.4. Вычислить интегралы:**

а)  $\int \frac{dx}{5 \cos x + 3} =$

б)  $\int \frac{\cos^3 x dx}{\sin^4 x} =$

в)  $\int \sin \frac{x}{2} \sin \frac{3x}{2} dx =$

г)  $\int \operatorname{ctg}^3 x dx =$

+ дополнительные задания (12) – (13)

### Занятие 5. Интегрирование иррациональных функций

Вопросы для подготовки к занятию:

1. Какая подстановка применяется при вычислении интегралов вида  $\int R(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\alpha/\beta}, \dots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\delta/\gamma}) dx$ ? \_\_\_\_\_

2. Какие подстановки сведут интеграл  $\int x^m (a + bx^n)^p dx$  к интегралу от рациональной дроби:

а) если  $p$  – целое число, то \_\_\_\_\_

б) если  $\frac{m+1}{n}$  – целое число, то \_\_\_\_\_

в) если  $\frac{m+1}{n} + p$  – целое число, то \_\_\_\_\_

3. Напишите, какие подстановки сведут интегралы от дифференциальных биномов к интегралу от рациональной дроби. Напишите значение параметров  $m, n, p$ .

1. $\int \frac{dx}{x(\sqrt[3]{x}+1)^2}$	$m =$ ; $n =$ ; $p =$
2. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^3}}$	$m =$ ; $n =$ ; $p =$

3. $\int \sqrt[3]{x} \sqrt{5x\sqrt[3]{x} + 3} dx$	$m =$	$; n =$	$; p =$
4. $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{\sqrt{x} + 1}} dx$	$m =$	$; n =$	$; p =$
5. $\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^3}}$	$m =$	$; n =$	$; p =$
6. $\int \frac{dx}{x^3 \sqrt[3]{2-x^3}}$	$m =$	$; n =$	$; p =$

### 5.1. Найти интегралы:

а)  $\int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}} =$

б)  $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(2x+1)^2} - \sqrt{2x+1}} =$



в)  $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 2x + 5}} =$

**5.2. Найти интеграл**  $\int \frac{3x+4}{\sqrt{-x^2+6x-8}} \cdot$

Решение. 1. Находим производную подкоренного выражения знаменателя.

2. Выделяем в числителе производную подкоренного выражения знаменателя.

3. Исходный интеграл можно переписать в виде суммы интегралов:

4. Вычислим отдельно каждый из полученных интегралов.

5. Окончательно получаем:  $\int \frac{3x+4}{\sqrt{-x^2+6x-8}} =$

**5.3. Найти интегралы:**

а)  $\int \frac{3 + \sqrt[3]{x+2}}{(1 + \sqrt[3]{x+2})(\sqrt[6]{x+2})^5} dx =$

б)  $\int \frac{3x-7}{\sqrt{5x^2+8x+1}} dx =$

**5.4. Найти интегралы:**

а)  $\int \frac{dx}{\sqrt{x}(\sqrt[4]{x}+1)^{10}} =$

$$б) \int \frac{dx}{x^4 \sqrt{1+x^2}} =$$

$$в) \int \frac{x^3 dx}{(a^2 - x^2) \sqrt{a^2 - x^2}} =$$

**5.5. Вычислите интегралы:**

$$а) \int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[6]{x}}}{\sqrt{x}} dx =$$

$$б) \int \frac{dx}{\sqrt{(1+2x^2)^3}} =$$

+ дополнительные задания (9)-(11)

### Занятие 6-7. **Определенный интеграл и его приложения** (3 часа)

Вопросы для подготовки к занятию:

1. Допишите формулу Ньютона – Лейбница:

$$\int_a^b f(x)dx = \underline{\hspace{15cm}}$$

2. Запишите формулу замены переменной в неопределенном интеграле:

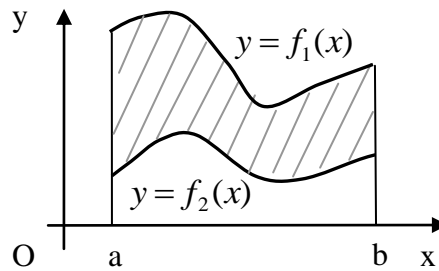
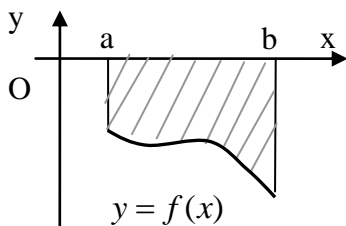
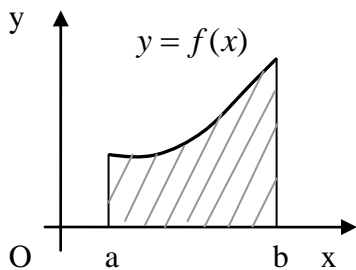
\_\_\_\_\_

При каких условиях она справедлива?

3. Формула интегрирования по частям в определенном интеграле имеет вид:

\_\_\_\_\_

4. Запишите формулы для вычисления площадей фигур, изображенных на рисунках



\_\_\_\_\_

5. Длина дуги кривой  $y = f(x)$  от точки  $A(a, f(a))$  до точки  $B(b, f(b))$  вычисляется по формуле \_\_\_\_\_

6. Объем тела, образованного вращением вокруг оси  $Ox$  криволинейной трапеции, ограниченной кривой  $y = f(x)$  ( $f(x) \geq 0$ ), и прямыми  $y = 0$ ,  $x = a$ ,  $x = b$ , вычисляется по формуле: \_\_\_\_\_

7. Если тело образовано при вращении вокруг оси  $Oy$  криволинейной трапеции, ограниченной кривой  $x = \varphi(y)$  ( $\varphi(y) \geq 0$ ) и прямыми  $x = 0$ ,  $y = c$ ,  $y = d$ , то объем тела вращения равен \_\_\_\_\_

8. Если дуга кривой  $y = f(x)$  ( $a \leq x \leq b$ ) вращается вокруг оси  $Ox$ , то площадь поверхности вращения вычисляется по формуле:

\_\_\_\_\_

### 6.1. Вычислить следующие интегралы:

а)  $\int_0^{\pi/4} \sin 2x dx =$

б)  $\int_1^e \frac{\ln^2 x}{x} dx =$

$$\text{В)} \int_1^9 \frac{dx}{5+2\sqrt{x}} =$$

$$\text{Г)} \int_2^3 x(3-x)^7 dx =$$

**6.2. Вычислить интегралы:**

$$\text{а)} \int_0^1 x e^{-x} dx =$$

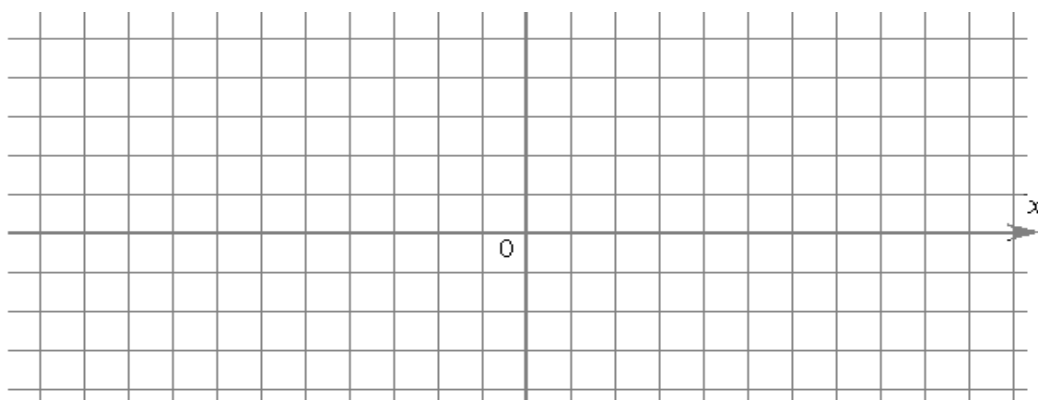
$$\text{б)} \int_1^e (x+1) \ln x dx =$$

$$\text{В)} \int_0^1 \arctg x dx =$$

г)  $\int_0^{\pi/4} x^2 \sin 2x dx$

**6.3. Найти площадь фигуры, ограниченной кривой  $y = \sin x$ , прямыми  $x = -\frac{7}{6}\pi$ ,  $x = \frac{\pi}{4}$ ,  $y = 0$ .**

Решение. Выполним чертеж.



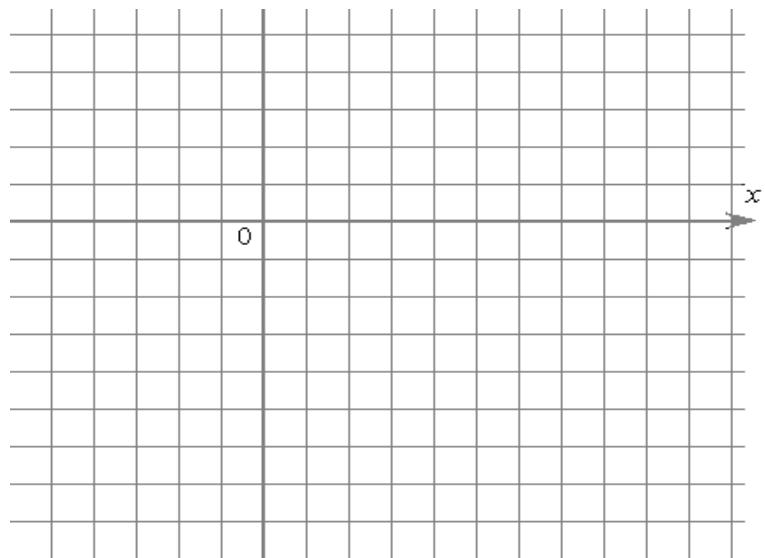
**6.4. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями  $y = x^2 - 6$  и  $y = -x^2 + 5x - 6$ .**

Решение.

1) Выполним чертеж:

Вычислим координаты вершины параболы  $y = -x^2 + 5x - 6$ :

Найдем абсциссы точек пересечения графиков данных функций:

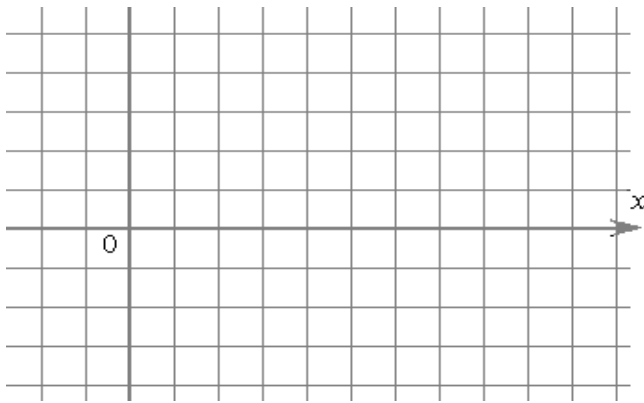


2) Находим искомую площадь:



**6.5.** Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями  $y = \sin \frac{x}{2}$ ,

$$y = \cos \frac{x}{2}, x=0.$$



**6.6.** Вычислить длину дуги кривой  $y = \ln \sin x$  от  $x_1 = \frac{\pi}{3}$  до  $x_2 = \frac{2\pi}{3}$ .

Решение. Воспользуемся формулой:

Для этого: 1) находим производную данной функции:

2) Преобразуем выражение  $\sqrt{1+(y')^2} =$

3) Находим длину дуги

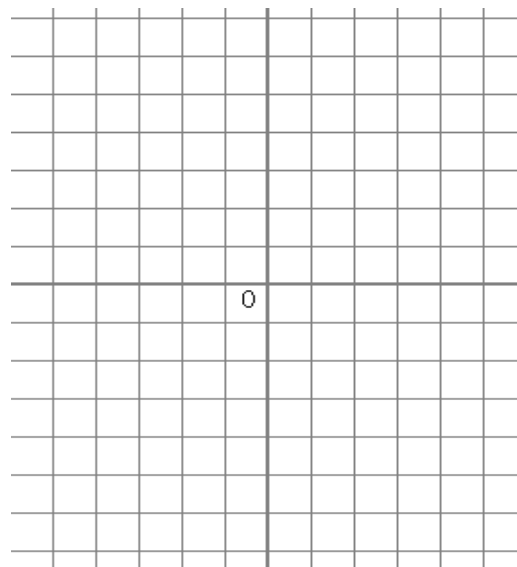
**6.7. Найти объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной линиями**

**а)  $xy = 6$ ;  $x = 1$ ;  $x = 4$ ;  $y = 0$ , вокруг оси  $Ox$ ;**

**б)  $xy = 6$ ;  $x = 1$ ;  $x = 4$ ;  $y = 1$ , вокруг оси  $Oy$ .**

Решение.

а) Если ось вращения -  $Ox$ , то объем  
тела вращения равен: \_\_\_\_\_

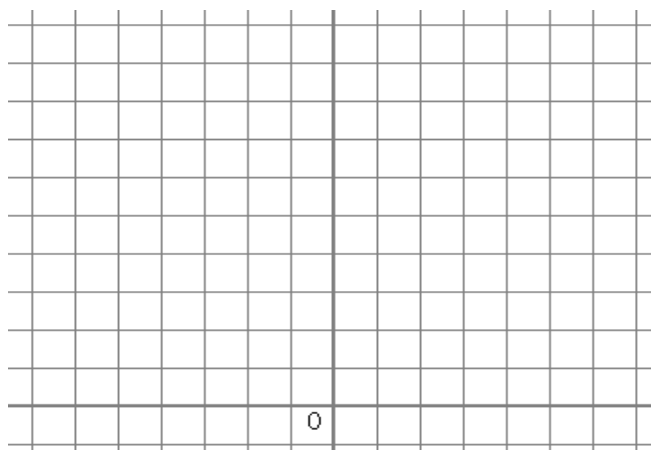


б) Если ось вращения -  $Oy$ , то объем тела вращения равен: \_\_\_\_\_

**6.8.** Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси  $Oy$  фигуры, ограниченной линиями  $2y = 16 - x^2$ ,  $y - 4 = 0$ ,  $y = 0$ .

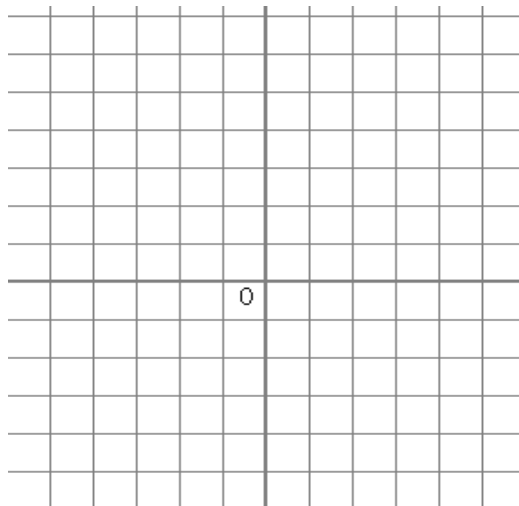
Решение.

Используем формулу:



**6.9.** Найти площадь поверхности, образованной вращением кривой  $x^2 = y + 2$ ;  $y = 1$  вокруг оси  $Oy$ .

Решение.



Воспользуемся формулой:

Для этого: 1) находим производную функции  $x$  по переменной  $y$ :

2) Преобразуем выражение  $\sqrt{1+(x'_y)^2} =$

3) Находим  $S_y =$

+ дополнительные задания (14)-(21)

### **Занятие 7. Несобственные интегралы (1 час)**

Вопросы для подготовки к занятию:

**1.** Несобственный интеграл  $I$  рода определяется следующим образом:

а)  $\int_a^{+\infty} f(x)dx =$  \_\_\_\_\_

б)  $\int_{-\infty}^b f(x)dx =$  \_\_\_\_\_

в)  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx =$  \_\_\_\_\_

**2.** Несобственный интеграл  $II$  рода определяется следующим образом:

а) если функция  $f(x)$  терпит бесконечный разрыв в точке  $x=b$ , то

$$\int_a^b f(x)dx = \underline{\hspace{10cm}}$$

б) если функция  $f(x)$  терпит бесконечный разрыв в точке  $x=a$ , то

$$\int_a^b f(x)dx = \underline{\hspace{10cm}}$$

в) если функция  $f(x)$  терпит разрыв во внутренней точке отрезка  $[a;b]$ , то

$$\int_a^b f(x)dx = \underline{\hspace{10cm}}$$

**3.** В каком случае несобственный интеграл сходится? расходится?

**7.1. Вычислите несобственный интеграл (или установите его расходимость):**

а)  $\int_0^{+\infty} \cos x dx =$

б)  $\int_{-\infty}^{-1} \frac{dx}{x^2} =$

**7.2. Продолжите нахождение несобственного интеграла  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$ .**

Решение. Подынтегральная функция четная, поэтому  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = 2 \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$ .

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} =$$

Таким образом,  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} =$

**7.3. Вычислите несобственный интеграл (или установите его расходимость):**

а)  $\int_0^1 \frac{dx}{x} =$

б)  $\int_0^2 \frac{dx}{2-x} =$

в)  $\int_{-8}^{27} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} =$

**7.4. Исследовать сходимость интегралов.**

а)  $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2} =$

$$\text{б) } \int_0^{+\infty} x e^{-x^2} dx =$$

$$\text{в) } \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + 1)(x^2 + 4)} =$$

$$\text{г) } \int_1^4 \frac{dx}{x^2 + x - 6} =$$

+ дополнительное задание (22)

### Дополнительные задания.

Вычислить интегралы:

1)  $\int \frac{dx}{e^x + e^{-x}};$

2)  $\int (\cos^2 x - \sin^2 x) \cdot \sqrt[3]{1 + \sin 2x} dx;$

3)  $\int \frac{e^{\operatorname{tg} x} - 7 \sin x + 5 \sin 2x}{\cos^2 x} dx;$

4)  $\int \sin 2x \cdot \ln \sin x dx;$

5)  $\int x^2 \cdot \ln \frac{x-1}{x+1} dx;$

6)  $\int \sqrt{x^2 + a} dx;$

7)  $\int \frac{(5x^4 + 1)}{x^2(x^8 + 2x^4 + 1)} dx;$

8)  $\int \frac{x^2 + 1}{x^4 + 1} dx;$

9)  $\int \frac{dx}{\sqrt{x-1} - \sqrt{x-2}};$

10)  $\int \frac{\sqrt{x(x+1)}}{\sqrt{x} + \sqrt{x+1}} dx;$

11)  $\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{-x^2 + 2x + 3}};$

12)  $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x};$

13)  $\int \cos x \cdot \cos 3x \cdot \cos 5x dx;$

14)  $\int_2^4 |3-x| dx;$

15)  $\int_0^\pi \sqrt{\frac{1 - \cos 2\varphi}{2}} d\varphi;$

16)  $\int_1^4 \frac{(x-1)dx}{\sqrt[3]{(3x-4)^2} - \sqrt[3]{3x-4} + 1};$

17)  $\int_0^\pi \frac{x \cdot \sin x}{1 + \cos^2 x} dx;$

18) Доказать:  $\int_{1/\sqrt{2}}^1 \frac{dx}{\arcsin x} = \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\cos x}{x} dx.$

19) Найти площадь фигуры, ограниченной:

а) кривой  $y = x^2 \cdot e^{-x^2}$  и её асимптотой;

б) линиями  $r = 2\cos 3\varphi$  и  $r = 1$ , ( $r \geq 1$ );

в) кривой  $\begin{cases} x = \sin 2t \\ y = \sin t \end{cases}.$

20) Вычислить длины дуг кривых:

а)  $y = \sqrt{x-x^2} + \arcsin \sqrt{x} + 3$ ,  $\frac{1}{16} \leq x \leq 1$ ;

б)  $\begin{cases} x = e^t (\cos t + \sin t) \\ y = e^t (\cos t - \sin t) \end{cases}, \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{4};$

в)  $r = \frac{1}{1 + \cos \varphi}$  от  $\varphi = 0$  до  $\varphi = \frac{\pi}{2}$ .

21) Найти объем тела, полученного вращением фигуры, ограниченной линиями:

а)  $y = \arccos x$ ,  $y = \arcsin x$ ,  $y = 0$  вокруг оси  $Oy$ ;

б)  $y = x^2 \cdot e^{-x^2}$  вокруг своей асимптоты.

22) Исследовать сходимость интегралов:

а)  $\int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} dx$ ; б)  $\int_0^2 \frac{dx}{x^2 - 4x + 3}.$